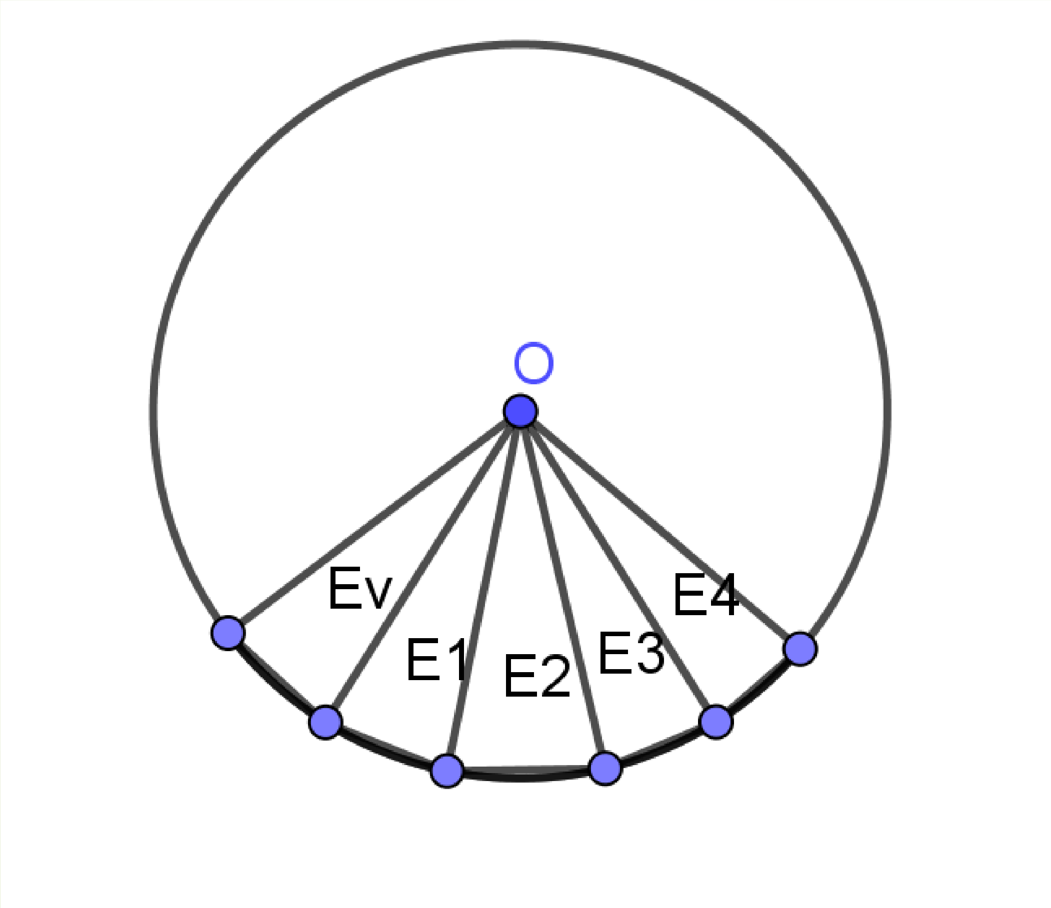
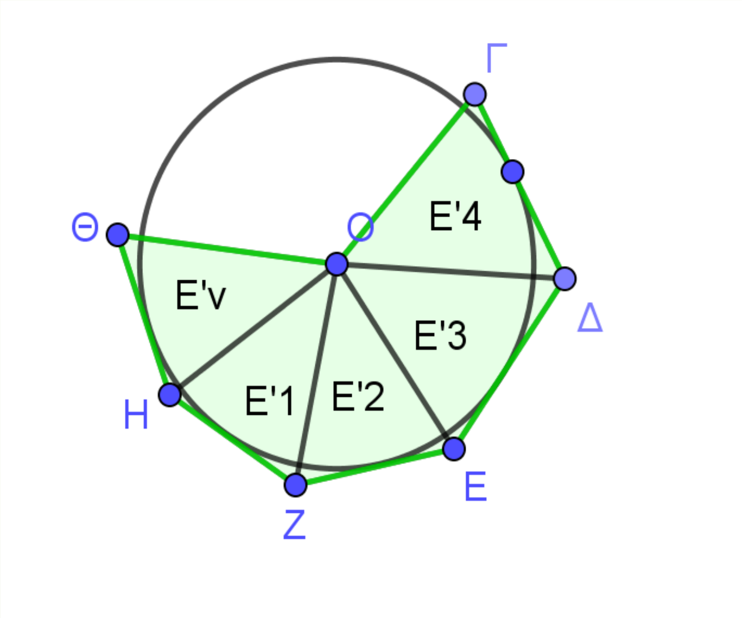
Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου σε κύκλο κανονικού ν-γ ώ ν ο υ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ν τριγώνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$S_\nu^E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . + E_\nu$$



Το εμβαδόν του περιγεγραμμένου σε κύκλο κανονικού ν-γώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ν τριγώνων όπως φαίνεται στο σχήμα.

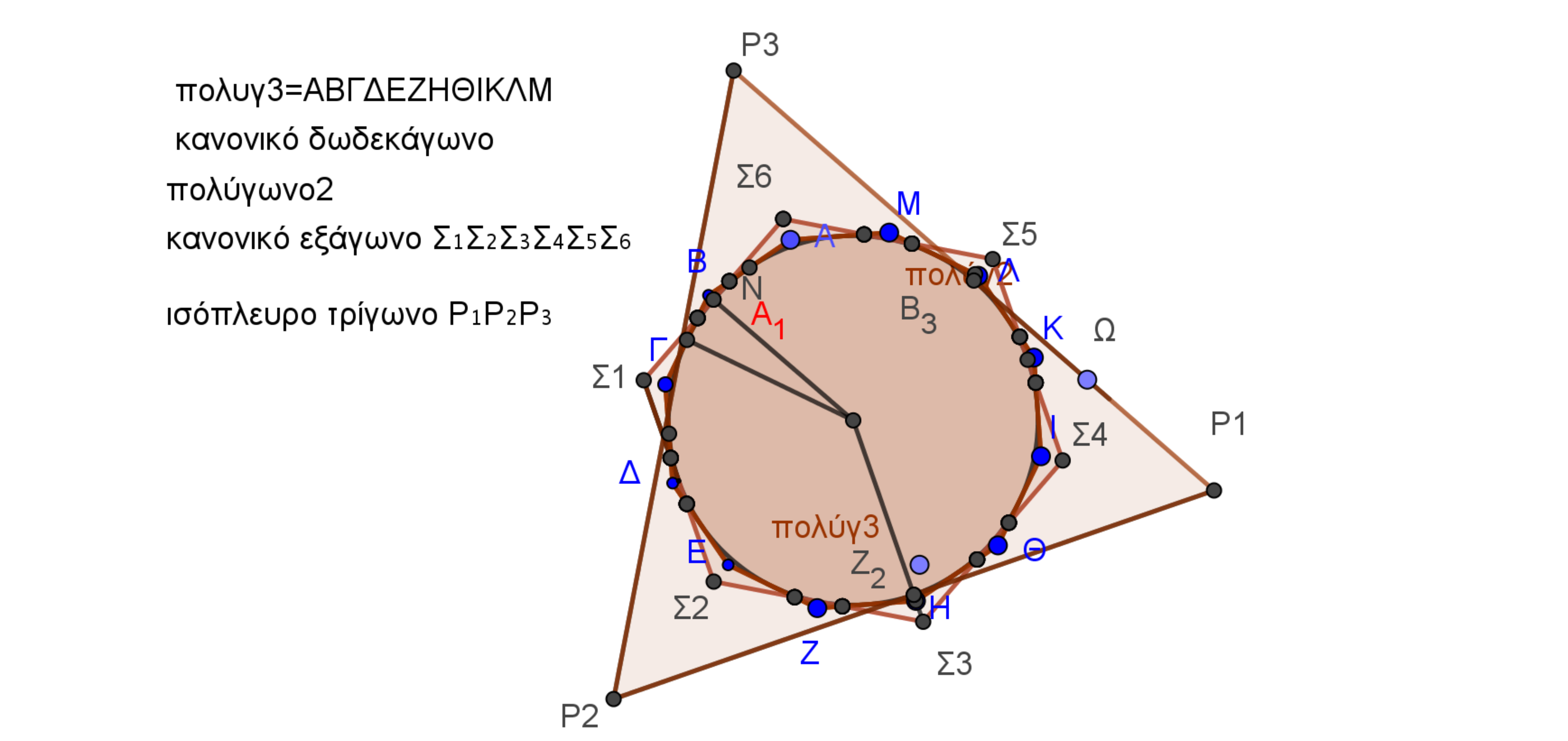
$$S_\nu^\Pi = E_1' + E_2'' + E_3' + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots .. + E_\nu'$$



Ισχύει $S_\nu^E \leq Εμβαδόν\ κύλου \leq S_\nu^\Pi$

Το S_ν^E είναι ένα **κάτω φράγμα** του Εμβαδού του κύκλου ενώ το S_ν^Πείναι ένα **άνω φράγμα** του Εμβαδού του κύκλου.

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΔΩΔΕΚΑΓΩΝΟ , ΕΞΑΓΩΝΟ , ΤΡΙΓΩΝΟ ΣΕ ΚΥΚΛΟ



ΣΧΟΛΙΟ: Όσο μεγαλώνει το πλήθος των πλευρών του κανονικού π ε ρ ι γ ε γ ρ α μ μ έ ν ο υ πολυγώνου τόσο το εμβαδόν του προσεγγίζει το εμβαδόν του κύκλου.

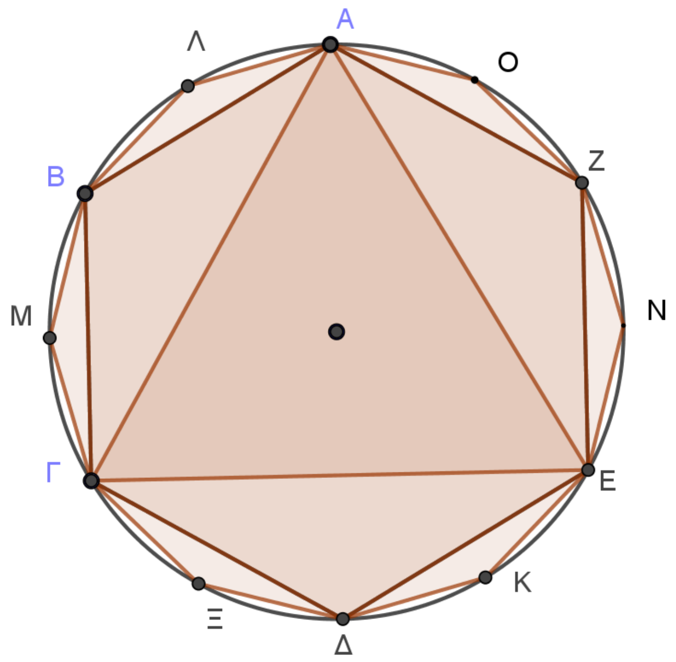
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΔΩΔΕΚΑΓΩΝΟ ,ΕΞΑΓΩΝΟ , ΤΡΙΓΩΝΟ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Το ΑΓΕ είναι ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο.

Το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο .

Το ΑΛΒΜΓΞΔΚΕΝΖΟ είναι κανονικό δ ω δ ε κ ά γ ω ν ο εγγεγραμμένο σε κύκλο.

.



ΣΧΟΛΙΟ: Όσο μεγαλώνει το πλήθος των πλευρών του κανονικού εγγεγραμμένου πολυγώνου τόσο το εμβαδόν του προσεγγίζει το εμβαδόν του κύκλου.

Όταν το ν τείνει στο $+\infty$ τότε το άνω και κάτω φράγμα ταυτίζονται οπότε

εξισώνονται με το εμβαδόν του κύκλου.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή Δύο κανονικά **ν-γ ω ν α** με το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια , το εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο **κανονικά ν-γ ω ν α** σε έναν κύκλο ακτίνας R είναι όμοια με λόγο ομοιότητας.

- λ=$\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu} = \frac{R}{R'}$ όπου τα λ_ν , λ'_ν είναι οι πλευρές των κανονικών εγγεγραμμένων και **π ε ρ ι γ ε γ ρ α μ μ έ ν ω ν ν-γ ώ ν ω ν** αντίστοιχα, τα α_ν,α'_ν είναι τα αντίστοιχα αποστήματα και R, R' οι αντίστοιχες ακτίνες αυτών .
- Ισχύουν (1) $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 <=> \lambda_\nu = 2 \cdot \sqrt{R^2 - a_\nu^2}$
- (2) $\alpha'^2_\nu + \frac{\lambda'^2_\nu}{4}=R^2 <=> \lambda'_\nu = 2 \cdot \sqrt{R'^2 - a'^2_\nu}$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Αν E_ν , E'_ν είναι τα εμβαδά των τ ω ν κανονικών εγγεγραμμένων και **π ε ρ ι γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν ω ν** κανονικών ν-γ ώ ν ω ν στον κύκλο ακτίνας R ΤΟΤΕ ΙΣΧΥΕΙ

- $E_\nu \leq Εμβαδόν\ κύκλου \leq E'_\nu$ όπου
- $E_\nu = \nu \cdot \alpha_\nu \cdot \sqrt{R^2 - \alpha_\nu^2}$ και
- $E'_\nu = \nu \cdot \alpha'_\nu \cdot \sqrt{R'^2 - \alpha_\nu'^2}$

Άρα

$\nu \cdot \alpha_\nu \cdot \sqrt{R^2 - \alpha_\nu^2} \leq Εμ.κύκλουν \leq \nu \cdot \alpha_\nu' \sqrt{R'^2 - \alpha_\nu'^2}$ < = >

$$< = > \frac{\nu \cdot \alpha_\nu \cdot \sqrt{R^2 - \alpha_\nu^2}}{\nu \cdot \alpha'_\nu \cdot \sqrt{R'^2 - \alpha_\nu'^2}} \leq \frac{Εμβαδόν\ κύκλου}{\nu \cdot \alpha'_\nu \cdot \sqrt{R'^2 - \alpha_\nu'^2}}$$

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{\nu \cdot \alpha_\nu \cdot \sqrt{R^2 - \alpha_\nu^2}}{\nu \cdot \alpha'_\nu \cdot \sqrt{R'^2 - \alpha_\nu'^2}} = 1$$ γιατί όταν

ν τείνει στο +∞ , το $\alpha_\nu = \alpha'_\nu$ και $R = R'$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει ότι και

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{\textit{Εμβαδόν κύκλου}}{\nu\cdot\alpha'_\nu\cdot\sqrt{R'^2-\alpha'^2_\nu}} = 1.$$

Θέτουμε h(ν)= $\frac{\textit{Εμβαδόν κύκλου}}{\nu\cdot\alpha'_\nu\cdot\sqrt{R'^2-\alpha'^2_\nu}}$ άρα $\lim_{\nu\to+\infty} h(\nu) = 1$ και

Εμβαδόν κύκλου=h(ν)$\cdot \nu \cdot \alpha'_\nu \cdot \sqrt{R'^2 - \alpha'^2_\nu}$

Οπότε *Εμβαδόν κύκλου*= $\lim\limits_{\nu\to+\infty}(\mathrm{h}(\mathrm{v})\cdot\nu\cdot\alpha'_{\nu}\cdot\sqrt{R'^2-\alpha'^2_{\nu}}\,)$=

$\lim\limits_{\nu\to+\infty}\mathrm{h}(\mathrm{v})\cdot\lim\limits_{\nu\to+\infty}(\nu\cdot\alpha'_{\nu}\cdot\sqrt{R'^2-\alpha'^2_{\nu}}) = 1\cdot\lim\limits_{\nu\to+\infty}(\nu\cdot\alpha'_{\nu}\cdot\sqrt{R'^2-\alpha'^2_{\nu}})$=

$\lim\limits_{\nu\to+\infty}(\nu\cdot\alpha'_{\nu}\cdot\sqrt{R'^2-\alpha'^2_{\nu}}) = \lim\limits_{\nu\to+\infty}(\nu\cdot\alpha_{\nu}\cdot\sqrt{R^2-\alpha^2_{\nu}}) = \lim\limits_{\nu\to+\infty}(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\nu\cdot\alpha_{\nu}\cdot\sqrt{R^2-\alpha^2_{\nu}})$=

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{1}{2}P_{\nu}\cdot\alpha_{\nu}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot R\cdot R=\pi\cdot R^2$$