

Του κύκλου τα γυρίσματα

Ο Βιτσέντζος Κορνάρος στη χώρα των Μαθηματικών Μοντέλων

Σταύρος Κομηνέας

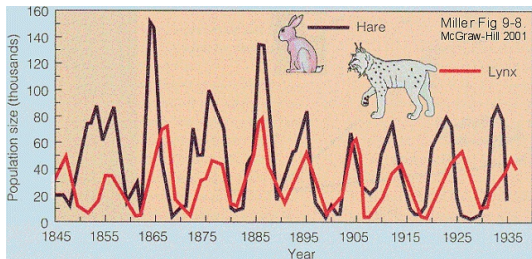
Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Κρήτης

23 Απριλίου 2024



Του κύκλου τα γυρίσματα που ανεβοκατεβαίνουν

Οι λαγοί και οι λύκοι σε ένα δάσος μετρήθηκαν για πολλά χρόνια



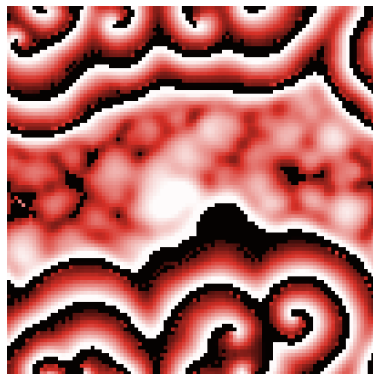
Η εξέλιξή τους περιγράφεται από το μοντέλο Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \frac{d(\text{hare})}{dt} = \alpha (\text{hare}) - c (\text{hare})(\text{lynx}) \\ \frac{d(\text{lynx})}{dt} = -b (\text{lynx}) + d (\text{hare})(\text{lynx}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - c xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + d xy \end{cases}$$

το οποίο προβλέπει κυκλικές εναλλαγές πληθυσμών

Και του Καιρού τα πράγματα, που αναπαημό δεν έχουν

Χημική αντίδραση Belousov-Zhabotinsky



Μοντέλο διάχυσης-αντίδρασης

$$D\nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, w)$$

$$D\nabla^2 w - \frac{\partial w}{\partial t} = g(u, w)$$

u, w είναι οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων.

Τα αντιδρώντα παράγουν συνεχώς μεταβαλλόμενα σπειροειδή κύματα

μα στο Καλό κ' εις το Κακό περιπατούν και τρέχουν

Μπορεί ο “κακός” λύκος να αλλάξει προς το “καλό” την ροή ενός ποταμού; (δείτε το βίντεο)



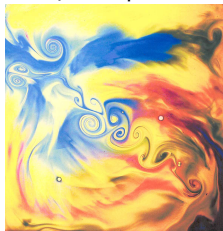
Παρατηρούμε την συμπεριφορά λύκων και ελαφιών και πώς
ένας εθνικός δρυμός με “καλά” και “κακά” ζώα εξελίσσεται απρόσμενα

(Αρετούσα) 'Όλες τσι χάρες κι αρετές ήτονε στολισμένη,
ευγενική και τακτική, πολλά χαριτωμένη
(Ερωτόκριτος) κι όλες τσι χάρες π' Ουρανοί και τ' 'στρη εγεννήσαν
μ' όλες τον εμοιράνασι, μ' όλες τον εστολίσαν.

Στρόβιλος στο νερό



Δίνες στην επιφάνεια υγρού



Κυκλοφορία του ρευστού
(θεμελιώδης ποσότητα)

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \iint \omega d\alpha.$$

Πολύπλοκη και όμορφη είναι η κίνηση του ρευστού

Μ^ο απ' όλους είχαν ακριβό πάντα στη συντροφιά του

έναν οπού Πεζόστρατον εκράζαν τ' όνομά του

Στρόβιλοι είναι η πιο σημαντική συντροφιά στα φτερά του αεροπλάνου.



του Παλατιού ήτο θαρρετός, ξεχωριστός παρ' άλλο,
και διχωστάς του ο Βασιλιός δεν ήκανε ένα ζάλο

Το αεροπλάνο δεν πετάει χωρίς τους στροβίλους.

Πάντα με καταστάμενους ήπρασσε, και ξετρέχει
να μάθει εκείνα που' δασι, κ' εκείνος δεν κατέχει

Οι περιδινήσεις θέτουν δύσκολα προβλήματα (για αιώνες άλυτα).



Ας μάθουμε από αυτόν που ξέρει καλύτερα να φτιάχνει πολύπλοκες δίνες!
(Δείτε στο video πώς τα δελφίνια φτιάχνουν δακτυλιοειδείς δίνες.)

Μέρος 2

Ας δούμε ένα μοντέλο καλύτερα

Ας δούμε καλύτερα το μοντέλο Λότκα-Βολτέρρα

Έχουμε μεταβλητές,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - cxy \\ \frac{dy}{dt} = -by + dxy \end{cases}$$

① Αριθμό λαγών, $x(t)$.

② Αριθμό λύκων, $y(t)$.

Προσοχή: Πρέπει $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$.

Οι εξισώσεις του προβλήματος περιγράφουν τις διαδικασίες

- Γέννησης λαγών (με παράμετρο α),
- Θανάτου λαγών λόγω των λύκων (με παράμετρο c),
- Αύξησης των λύκων (με παράμετρο d),
- Θανάτου λύκων (με παράμετρο b).

Οι παράμετροι υπολογίζονται ως εξής,

- π.χ., $\alpha = 0.01$ σημαίνει ότι γεννιέται ένα λαγουδάκι κάθε χρόνο από κάθε 100 γονείς λαγούς.

Ένα μοντέλο για πολλές μελέτες

Το μοντέλο Lotka-Volterra χρησιμοποιείται

- Στην Βιολογία (όπως είδαμε),
- Στα Οικονομικά, για να εξηγήσει τους οικονομικούς κύκλους,
- Στις Επιστήμες περιβάλλοντος, για να μελετηθεί η δυναμική της μετάβασης στην παραγωγή ενέργειας από τον Ήλιο.

Στα όλα τα παραπάνω

- Οι μεταβλητές,
- Οι παράμετροι,
- Οι όροι των εξισώσεων

είναι μαθηματικά ίδιες/οι ή παρόμοιες/οι, όμως έχουν διαφορετική φυσική σημασία για κάθε σύστημα που μελετάμε.

Ένα συμπέρασμα

Ό,τι δουλειά και αν κάνεις,
αν ξέρεις μαθηματικά,
την κάνεις καλύτερα.